APROXIMACIÓN DE UN NÚMERO REAL. ESTIMACIÓN, REDONDEO Y ERRORES

TEORÍA

Aproximación de un número real: Como dijimos en el tema anterior, un número real tiene infinitas cifras decimales no periódicas, por lo que nunca vamos a poder dar todas sus cifras decimales, sino que siempre vamos a poder dar sólo una cantidad finita de ellas. Por ejemplo, cuando decimos que $\sqrt{2} = 1,414213562$ estamos dando sólo las primeras 9 cifras decimales de $\sqrt{2}$. En este tema vamos a ver hasta qué punto es buena la aproximación que estamos dando.

Notación científica: Sólo la vamos a dar para hacer más clara la notación. La notación científica consiste en dar el número como producto de un número con sólo una cifra antes de la coma, y una potencia de diez que nos dirá cuántos ceros tiene el número.

Así $456200000 = 4,562 \cdot 100000000 = 4,562 \cdot 10^8$ y $0,000000000035 = 3,5 \cdot 0,000000000001 = 3,5 \cdot 10^{-11}$

Redondeo y truncamiento: Si tenemos con seguridad una cantidad de cifras exactas de un número real, podemos dar una aproximación de ese número de menos cifras de dos formas:

Truncamiento: Cortamos el número a partir de cierta cifra. Por ejemplo $\pi = 3,141592...$, truncado a las milésimas sería $\pi = 3,141$. y a las diezmilésimas $\pi = 3,1415$

Redondeo: Cortamos el número a partir de cierta cifra, pero sumamos uno a la última cifra que aparezca, en el caso de que la primera que omitamos sea mayor o igual que 5. Por ejemplo, redondeando el número $\pi = 3,141592...$ a las centésimas tenemos $\pi = 3,14$, a las milésimas $\pi = 3,142$ y a las diezmilésimas $\pi = 3,1416$. En general es preferible el redondeo al truncamiento, ya que cometemos un error menor, como veremos a continuación.

Error absoluto: Cuando aproximamos un número a por otro b estamos cometiendo un error $|a-b|$. En general, si a es un número irracional (infinitas cifraas decimales) y b es su redondeo o truncamiento, $|a-b|$ será de nuevo un número irracional, luego tampoco podemos darlo con exactitud, lo que si podemos hacer es acotarlo, es decir, dar un número que lo limite superiormente. A dicho número lo llamaremos error absoluto.

Por ejemplo, cuando decmimos que $\pi 3,1415$ estamos cometiendo un error de $\pi - 3,141592 = 3,141592654... - 3,141592 = 0,000000654... = 6,54 \cdot 10^{-7} \leq 7 \cdot 10^{-7}$ luego estamos cometiendo un error de $7 \cdot 10^{-7}$.

En general el mayor error que cometeremos al truncar un número en la $n-$ésima posición decimal será de $10 \cdot 10^{-(n+1)} = 10^{-n}$. Es decir, al aproximar a las décimas cometemos un error de $10^{-1} = 0,1$, al aproximar a las centésimas de $10^{-2} = 0,01$ y así sucesivamente.

Si lo que hacemos es redondear, reducimos el error respecto del truncamiento: Así al redondear a las milesimas π cometemos un error $|\pi - 3,142| = 0,000407 \leq 0,0005 = 5 \cdot 10^{-4}$. En general al redondear un número en la $n-$ésima posición decimal cometemos un error de $5 \cdot 10^{-(n+1)}$

Error relativo: No es lo mismo cometer un error de una milésima de metro al medir el tamaño de un edificio de unos 10 m que al medir el tamaño de un paramecio $0'05$ mm. El error relativo nos dice cómo de grande es el error que cometemos en relación con el tamaño del número. Así:

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{\text{valor exacto}}$$

Como en general no se conoce el valor exacto, se suele dar el valor truncado por exceso. Es decir al aproximar π por $3,141$ cometemos un error relativo de $\frac{0,000592...}{3,141592....} \leq \frac{10^{-3}}{3,142} = 0,000318269... \leq 0,0004 = 4 \cdot 10^{-4}$

Ejercicio 1 *Expresa en notación científica los siguientes números y aproxímalos a su primera cifra significativa:*

a) $1234 \cdot 10^5$

b) $0,0000000000000067012$

c) $0,00763 \cdot 10^6$

d) $-527,05 \cdot 10^{-3}$

Ejercicio 2 *Redondea a décimas los números* $234,67$ *y* $4,955$

Ejercicio 3 *Redondea a centenas* $1897,67$*,* 987514 *y* 123

Ejercicio 4 *Calcula los errores absolutos y relativos cometidos en los últimos ejercicios.*