Tema 10: Funciones.

Es muy importante entender bien este concepto, ya que todas las matemáticas posteriores se van a apoyar, de una u otra manera, en él.

1. Definición y estudio de funciones.

Definición 1 *Sean x e y dos magnitudes escalares. Una función es una regla que nos permite obtener el valor de y a partir del valor de x. Esta relación entre las dos magnitudes la escribiremos $y = f(x)$ donde f es la función entre las dos magnitudes.*

Ejemplo 1 *El área de un cuadrado es función del lado, en efecto, si un cuadrado tiene lado l, entonces tiene área l^2. Esta relación la escribiremos $A(l) = l^2$.*

Ejemplo 2 *El precio que cuesta aparcar en un parking es función del tiempo que estemos aparcados en él.*

Observación : Para que f sea una regla es necesario que asocie a cada valor de x *un sólo valor de* y. Si ahora pintamos en los ejes coordenados los pares de puntos $(x, f(x))$ obtenemos un dibujo que llamamos *gráfica de la función* f y que la caracteriza. De hecho la gráfica nos da muchos datos acerca de la función de una manera muy sencilla. En cursos posteriores os dedicaréis a ver cómo dibujar gráficas de funciones a partir de la expresión algebraica. En este cursos nos vamos a dedicar a estudiar las gráficas de unas cuantas funciones sencillas y a familiarizarnos con algunas características de las funciones.

1.1. Dominio y recorrido de una función.

1.1.1. Dominio.

Definición 2 *Dada una función f, llamamos dominio de f, escrito $Dom(f)$ al conjunto de todos los x para los cuales existe $f(x)$.*

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)\} \tag{1}$$

Hay tres factores que pueden restringir el dominio de una función:

1. Que para algunos x realicemos una operación prohibida.

   Ejemplo 3 *En el dominio de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ no pueden estar ni $x = 1$ ni $x = -1$ ya que para esos dos valores estaríamos dividiendo entre cero.*

2. Que en el problema que esté representando la función no tenga sentido considerar determinados x.

   Ejemplo 4 *En la función que representaba el área del cuadrado en función del lado no tiene sentido que consideremos lados negativos.*

3. Que al que defina la función le apetezca definirla restringiendo el dominio.

   Ejemplo 5 *Yo puedo definir, sin ningún problema, la función $f(x) = x^2 - 1$ diciendo que la $x \in [-2, 1]$.*

De estos tres motivos nosotros estudiaremos sólo el primero, ya que es el más "matemático".

1.1.2. Operaciones que van a restringir el dominio.

Cuando nos den una función, consideraremos que su dominio es el más general posible, es decir, consideraremos que el dominio es todo $\mathbb{R}$ menos los puntos para los cuales realicemos operaciones prohibidas. Las operaciones prohibidas son las siguientes (por ahora):

1. x para los cuales se anule algún denominador.
2. x para los cuales alguna raíz cuadrada sea negativa.
3. x papa los cuales lo de dentro de un logaritmo sea menor o igual que cero.
4. x para los cuales lo de dentro de una tangente sea de la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{R}$ [1].

Ejemplo 6 *Vamos a estudiar el domindio de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = \frac{2x}{3x-5}$
   Esta función tiene un denominador, luego hemos de ver qué números lo anulan $3x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5/3$ luego $Dom(f) = \mathbb{R} - \{5/3\}$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$
   En este caso lo que tenemos es una raíz cuadrada, luego tendremos que quitar del dominio los x que hagan que lo de dentro sea negativo, es decir hay que resolver $x^2 - 2 < 0 \Rightarrow x^2 < 2 \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ luego $Dom(f) = \mathbb{R} - (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. $f(x) = ln(x^2 - x)$
   Ahora tenemos un logaritmo, luego hemos de cuidar que lo de dentro sea positivo, vamos a ver qué números cumplen $x^2 - x \leq 0 \Rightarrow x \in [0, 1]$ luego $Dom(f) = \mathbb{R} - [0, 1]$.

Ejercicio 1 *Halla el dominio de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = \frac{4x+1}{x^2-5x+6}$
2. $f(x) = \frac{x}{x}$

[1]Esta regla esta incluída en las primera, ya que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y los ceros del denominador son los puestos más arriba, pero la pongo aparte para que no se te pase.

3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
4. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$
5. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x - 1}$
6. $f(x) = \operatorname{tg} x^2$
7. $f(x) = \frac{x^2}{1 - \sqrt{x}}$
8. $f(x) = \sqrt{\ln(1 + x^2)}$

1.1.3. Recorrido.

Definición 3 *Llamamos recorrido de una función al conjunto de los y que son imagen de algún x.*

$$R(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\} \tag{2}$$

En general es mucho más difícil hallar el recorrido que el dominio, por lo que no vamos a hallarlo aquí.

1.2. Simetrías.

Hay dos simetrías importantes, la simetría respecto al eje $\mathcal{Y}$ y la simetría respecto al $\mathcal{O}$, origen de coordenadas.

1.2.1. Funciones pares.

Recuerda que el simétrico respecto del eje $\mathcal{Y}$ de un punto (a, b) es el punto $(-a, b)$.

Teorema 1 *La gráfica de una función es simétrica respecto al eje $\mathcal{Y}$ si y sólo si*

$$f(-x) = f(x) \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN :*Que una función sea simétrica respecto al eje $\mathcal{Y}$ quiere decir que si un punto $(x, f(x))$ está en la gráfica también está su simétrico, el $(-x, f(x))$, lo cual quiere decir que la imagen del $-x$ ha de ser $f(x)$, ya que f es una función, luego $f(-x) = f(x)$. Es inmediato comprobar la otra implicación.*

Definición 4 *Diremos que una función f es par si cumple que $f(-x) = f(x)$.*

Claramente, por lo visto antes, las funciones pares son las que son simétricas respecto del eje $\mathcal{Y}$.

1.2.2. Funciones impares.

Recuerda que el simétrico respecto del origen de coordenadas de un punto (a, b) es el punto $(-a, -b)$.

Teorema 2 *La gráfica de una función es simétrica respecto del origen de coordenadas si y sólo si*

$$f(-x) = -f(x) \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN :*Que una función sea simétrica respecto al origen de coordenadas quiere decir que si un punto $(x, f(x))$ está en la gráfica también está su simétrico, el $(-x, -f(x))$, lo cual quiere decir que la imagen del $-x$ ha de ser $-f(x)$, ya que f es una función, luego $f(-x) = -f(x)$. Es inmediato comprobar la otra implicación.*

Ejercicio 2 *¿Por qué no puede haber funciones simétricas respecto del eje $\mathcal{X}$?*

Ejercicio 3 *Si f es una función impar ¿Cuánto vale $f(0)$?*

Ejercicio 4 *Halla las simetrías de las siguientes funciones (caso de que las tengan):*

1. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
2. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x^2}$
3. $f(x) = x^6 - 4x^2 - 5$
4. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$
5. $f(x) = \operatorname{tg} x$
6. $f(x) = \frac{x}{x^3-5x}$

1.3. Crecimiento.

Definición 5 *Diremos que una función f es creciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Es decir, si a medida que crecen los x también crecen los y. En la gráfica esto quiere decir que si recorremos el eje $\mathcal{X}$ en el sentido normal, la gráfica va subiendo.*

Una función puede ser creciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ y no serlo en $(-\infty, \infty)$.

Ejercicio 5 *Pon un ejemplo de una tal función (dibuja cómo podría ser su gráfica).*

Definición 6 *Diremos que una función f es creciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Es decir, si a medida que crecen los x los y decrecen. En la gráfica lo que veremos es que la gráfica baja.*

Definición 7 *Llamamos* extremo *de una función a un punto en el cual la función cambia su crecimiento:*

1. *Si pasa de ser creciente a decreciente diremos que es un* máximo.
2. *Si pasa de ser decreciente a creciente diremos que es un* mínimo.

Ejercicio 6
1. *Si f es una función* par *que es creciente en el $(0, 4)$ ¿Qué comportamiento tiene en el $(-4, 0)$?¿Qué tiene en $x = 0$?*
2. *Si f es una función* impar *que es decreciente en el $(0, 4)$ ¿Qué comportamiento tiene en el $(-4, 0)$?*

1.4. Curvatura.

La curvatura lo que estudia es la posición relativa de la curva con respecto a su tangente.

Definición 8 *1. Diremos que una función f es cóncava en un punto x_0 si alrededor de x_0 la gráfica de la función queda por encima de la gráfica de la tangente.*

2. Diremos que una función f es convexa en un punto x_0 si alrededor de x_0 la gráfica de la función queda por debajo de la gráfica de la tangente.

3. Diremos que una función f es cóncava (respec. convexa) en un intervalo si lo es en todos los puntos de intervalo.

4. Diremos que un punto $x = x_0$ es un punto de inflexión de una curva si la tangente atraviesa a la gráfica en ese punto. En un punto de inflexión la función pasa de ser cóncava a ser convexa (o al revés).

Ejercicio 7 *1. Si f es una función par, convexa en el $(2, 6)$ ¿qué podemos decir de su curvatura en el $(-6, -2)$?*

2. Si f es una función impar, cóncava en el $(-4, 0)$ ¿Qué podemos decir de su curvatura en el $(0, 4)$?¿Qué es el punto $x = 0$?

3. Si una función cóncava tiene un extremo ¿De qué tipo tiene que ser dicho extremo?

4. Si una función convexa tiene un extremo ¿De qué tipo puede ser dicho extremo?

5. ¿Una función convexa en todo $\mathbb{R}$ puede ser par?¿E impar?

6. ¿Cuántos extremos puede tener una función que sea convexa en todo $\mathbb{R}$?

Ejercicio 8 *Dibuja una función que sea:*

1. *creciente y cóncava.*
2. *creciente y convexa.*
3. *decreciente y cóncava.*
4. *decreciente y convexa.*

1.5. Continuidad.

Definición 9 *Diremos que una función es continua si podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel[2]. Si en algún punto tenemos que levantarlo diremos que f es discontinua en ese punto. Hay tres tipos de discontinuidades (4 para algunos, pero los matemáticos no nos matamos por esto):*

Evitable: *Cuando cambiando la definición de la función en dicho punto la función nos sale continua.*

[2]La definición matemática es que una función es continua en un punto x_0 si

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

De salto: *Cuando en el punto en el que es discontinua nos acercamos a algo por los dos lados, pero nos acercamos a sitios distintos. En particular podemos estar acercándonos a* $\pm\infty$ *en alguno de los dos sentidos (en este caso se puede hablar de un* salto infinito*).*

Esencial : *Si en alguno de los dos sentidos ”no nos acercamos a nada en concreto”.*

1.6. Periodicidad.

Definición 10 *Diremos que una función* f *es periódica de periodo* T *si*

$$f(x+T) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

1.7. Ramas infinitas y Asíntotas.

Definición 11 *Llamaremos rama infinita de una función a aquélla que se nos salga fuera del papel.*

Definición 12 *Llamamos asíntota a cualquier curva que aproxime tanto como queramos a la función en una rama infinita. Normalmente al referirnos a asíntotas estaremos hablando de rectas. Las rectas asíntotas son de tres tipos:*

1. *Horizontales.Son de la forma* $y = b$*.*
2. *Verticales. Son de la forma* $x = a$*.*
3. *Oblicuas. Son de la forma* $y = mx + b$*.*

Hacemos esta clasificación porque cada una de estos tres tipos de asíntotas se halla de formas distintas.

1.7.1. Procedimiento para hallar las asíntotas.

Verticales : Nuestros candidatos a asíntotas van a ser las $x = a$ donde los a son los ceros de los denominadores (incluída la tangente) y los puntos que anulen lo de dentro de las funciones logaritmo. En el curso siguiente hay que comprobar que realmente son asíntotas, para lo cual hay que probar que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

Horizontales : Nuestros candidatos son las rectas de la forma $y = b$ donde b es el número al que se aproxima la función cuando $x \to \infty$. El próximo año tendrás que hallar

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$$

Obliculas : Son las más complicadas, a título informativo compentaré que son de la forma $y = mx + b$ donde

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx$$

Ejercicio 9 *¿Cuántas asíntotas oblicuas puede tener una función?¿Cuántas horizontales?¿Una función puede tener una oblicua y una horizontal?¿Cuántas oblicuas y horizontales puede tener en total?¿Cuántas asíntotas verticales puede tener en total?*

Ejercicio 10 *Una función es cóncava y se aproxima a una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ ¿Puedes decir algo acerca del crecimiento o decrecimiento de la función?*

2. Función inversa.

Definición 13 *Diremos que una función es* inyectiva *si cualquier recta horizontal la corta sólo una vez. Dicho de otra manera, si no hay dos puntos $a \neq b$ tales que $f(a) = f(b)$* [3]

Ejemplo 7
1. $f(x) = \frac{1}{x}$ *es inyectiva, ya que* $f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \Rightarrow a = b$.
2. $f(x) = x^2$ *NO es inyectiva, ya que* $f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 = b^2 \to a = \pm b$.

Esto es importante, ya que, si una función es inyectiva, podemos definir una función que la "deshace":

Definición 14 *Dada una función f inyectiva, llamaremos función inversa f^{-1} a la función definida por $f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$. Es decir, a la función que sirve para despejar f.*

Ejercicio 11 *¿Por qué hemos tenido que pedir que f sea inyectiva en la definición anterior?*

Ejercicio 12 *¿Qué dominio tiene la función f^{-1}?¿Cuál es su recorrido?*

Ejercicio 13 *¿Puede una función par tener inversa?¿Y una función impar?*

Ejemplo 8
1. *Sea* $f(x) = e^x$, $f(a) = e^a = b \iff a = \ln b$ *luego* $f^{-1}(x) = \ln x$ *(la inversa de la función exponencial es la función logarítmica)*
2. *Sea* $g(x) = \frac{1}{x}$, $g(a) = \frac{1}{a} = b \iff 1 = ab \iff a = \frac{1}{b}$ *luego* $g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

Fíjate que para hallar la inversa de una función lo único que tienes que hacer es poner $y = f(x)$ y despejar la x en función de la y y luego intercambiarlas.

Ejemplo 9 *Queremos hallar la inversa de la función* $f(x) = \sqrt{1 + \ln x}$ *luego* $y = \sqrt{1 + \ln x} \iff y^2 = 1 + \ln x \iff y^2 - 1 = \ln x \iff e^{y^2-1} = x$ *luego* $f^{-1}(x) = e^{x^2-1}$.

Ejercicio 14 *Halla las inversas de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = \frac{x}{1-x}$
2. $f(x) = \sqrt{x}$

[3] La definición matemática es que f es inyectiva $\iff (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

3. $f(x) = \ln x$
4. $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})$
5. $f(x) = \ln \frac{2x}{x+1}$
6. $f(x) = sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *(Ojo, es de nota)*

2.1. Gráfica de $y = f^{-1}(x)$ conocida la gráfica de $y = f(x)$

Fíjate que si un punto $(x_0, f(x_0))$ está en la gráfica de f entonces el punto $(f(x_0), x_0)$ está en la gráfica de f^{-1} ¿Qué relación tienen los puntos (a, b) y (b, a)?¿Son simétricos?¿Respecto de qué?
Tenemos el siguiente resultado (Que se demuestra fácilmente a partir de lo anterior de una manera muy parecida a lo que hicimos en el tema de simetría):

Teorema 3 *La gráfica de $y = f^{-1}(x)$ es la simétrica respecto de la recta $y = x$ de la gráfica de $y = f(x)$.*

Ejercicio 15 *Demuestra el teorema anterior (La entrega de este ejercicio es voluntaria y se valorará muy positivamente).*

Ejercicio 16 *Si una función cumple que $f^{-1}(x) = f(x)$ ¿Podemos encontrar alguna simetría en dicha función?¿Cuál?*

Ejercicio 17
1. *Una función f, inyectiva, cumple que es creciente y cóncava en el intervalo $(2, 5)$ y $f(2) = 3$, $f(5) = 4$ ¿Podemos decir algo del crecimiento y la curvatura de f^{-1} en algún intervalo?¿En cuál y qué podemos decir?*
2. *Si además sabemos que f tiene un punto de inflexión en $x = 0$ y que $f(0) = 1$ ¿Qué dato nos da eso de f^{-1}?*
3. *Supongamos ahora que f tiene un extremo (máximo o mínimo) en $x = -1$ y $f(-1) = -3$ ¿Qué dato nos da eso de f^{-1} ?(Piensa bastante la respuesta)*
4. *Si sabemos que f tiene una asíntota horizontal $y = 7$ ¿Qué dato nos da eso de f^{-1}?*
5. *¿Y si la asíntota es una vertical $x = -2$?*
6. *Por último, supón que f tiene una asíntota oblicua $y = 2x + 3$ ¿Qué podemos asegurar de f^{-1}?*

Ejercicio 18 *A partir de las gráficas de las funciones del Ejercicio 14 dibuja las gráficas de sus inversas.*

2.2. Funciones que no tienen inversa global

Hay casos en los que una función no tiene una inversa cuando su dominio es todo $\mathbb{R}$, pero sí lo tiene cuando reducimos el dominio de la función.

Ejemplo 10 *Como vimos más arriba $f(x) = x^2$ no tiene inversa global, ya que tanto a como $-a$ tienen la misma imagen, sin embargo, si consideramos que $Dom(f) = [0, +\infty)$ automáticamente f en su dominio sí es inyectiva y podemos considerar su inversa, que en este caso es la función $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. En cursos anteriores nos definían $\sqrt{a}$ como el número que elevado al cuadrado daba a. Ahora vemos que eso es inexacto ($-\sqrt{a}$ también lo cumple), por lo que la definición debería ser "De los dos números que cumplen que al cuadrado dan a $\sqrt{a}$ es el positivo. Del mismo modo podíamos haber considerado que el dominfio de f era el $(-\infty, 0]$ (¿Por qué?)...¿Cuál hubiera sido la inversa de f en ese intervalo?*

Ejercicio 19 *Dadas las siguientes funciones halla un intervalo máximo en el cual sean inyectivas y dibuja la gráfica de la función inversa que tienen cuando restringimos el dominio a dicho intervalo. Por último di cuál es el dominio y el recorrido de la función inversa.*

1. $f(x) = \operatorname{sen} x$ *(a $f^{-1}(x)$ la llamaremos $\operatorname{sen}^{-1} x$ o $\operatorname{arc\,sen} x$)*
2. $f(x) = \cos x$ *(a $f^{-1}(x)$ la llamaremos $\cos^{-1} x$ o $\operatorname{arc\,cos} x$)*
3. $f(x) = \operatorname{tg} x$ *(a $f^{-1}(x)$ la llamaremos $\operatorname{tg}^{-1} x$ o $\operatorname{arc\,tg} x$)*

3. Dibujo de las gráficas de $f(x+a)$, $f(x)+a$, $f(ax)$ y $af(x)$ a partir de las de $f(x)$.

A partir de la gráfica de $y = f(x)$ podemos pintar sin mucha dificultad las gráficas de las demás funciones del título. Vamos a ver cómo se puede deducir fácilmente.

3.1. $y = f(x) + a$

Si el punto $(x_0, f(x_0))$ está en la gráfica de $y = f(x)$ entonces el punto $(x_0, f(x_0) + a)$ está en la de $y = f(x) + a$. Luego todos los puntos de $y = f(x) + a$ están a unidades verticales separados de los de $y = f(x)$ (hacia arriba caso de que $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$).

3.2. $y = f(a + x)$

Ahora tenemos que fijarnos que si $(x_0, f(x_0))$ es un punto de $y = f(x)$ entonces $(x_0 - a, f(x_0))$ es un punto de $y = f(x + a)$. Luego la gráfica de $y = f(x + a)$ es la misma que la de $y = f(x)$ pero desplazada a unidades horizontalmente (hacia la izquierda si $a > 0$ y hacia la derecha si $a < 0$).

3.3. $y = af(x)$

Si el punto $(x_0, f(x_0))$ está en la gráfica de $y = f(x)$ entonces el punto $(x_0, af(x_0))$ está en la de $y = af(x)$. Luego todos los puntos de $y = af(x)$ son a veces más grandes (verticalmente hablando) que los de de los de $y = f(x)$, por lo que la gráfica de $y = af(x)$ es como la de $y = f(x)$ pero estirada verticalmente a veces (queda distorsionada).

Ejercicio 20 *¿Qué pasa si $a < 1$?¿Y si $a < 0$?*

3.4. $y = f(ax)$

Ahora tenemos que fijarnos que si $(x_0, f(x_0))$ es un punto de $y = f(x)$ entonces $(\frac{x_0}{a}, f(x_0))$ es un punto de $y = f(ax)$. Luego la gráfica de $y = f(ax)$ es la misma que la de $y = f(x)$ pero contraída a veces horizontalmente.

Ejercicio 21 *¿Qué pasa ahora si $a < 1$?¿Y si $a < 0$?*

3.5. Resumen.

Como resumen podemos decir que si la operación es sumar la tranformación es una translación y si es un producto es una dilatación. Si la operación se hace fuera de los paréntesis, la tranformación es vertical y si es dentro la operación es vertical.

Ejercicio 22 *¿Cómo es la gráfica de $y = af(ax)$ en función de la de $y = f(x)$?¿Y la de $y = af(x + a)$?¿Y la de $y = f(x + a) + a$?¿Y la de $y = af(\frac{x}{a})$?*

4. Estudio de funciones especiales.

4.1. Funciones de primer grado.

Este tipo de funciones tiene la forma $f(x) = mx + b$. Como hemos estudiado en el tema anterior la gráfica de estas funciones es una recta que corta en el punto $(0, b)$ al eje $\mathcal{Y}$ y que tiene pendiente m (es decir, cada unidad que aumente la x, la y aumentará m). En el tema anterior también vimos que $m = \operatorname{tg}\theta$ donde θ es el ángulo que forma la recta con el eje $\mathcal{X}^+$ (es decir, el semieje positivo del eje).
Si $m = 0$ diremos que la función $y = b$ es una *función constante*. La gráfica de las funciones constantes son rectas horizontales.

4.2. Funciones de segundo grado.

Las funciones de segundo grado son de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Todas las funciones de segundo grado son parábolas que podemos dibujar dando 3 valores a la x, pero hay una forma un poco más matemética de hacerlo. Para ello tenemos que entender un poco mejor qué significan cada uno de los tres parámetros a, b y c.

a : El valor de a determina la abertura de la parábola. Cuanto mayor sea a más abierta estará la parábola.

b : Hasta la siguiente sección no entenderemos bien el valor de b, pero para no dejar este apartado en blanco, podemos decir que b se relaciona con translaciones en sentido horizontal de la parábola.

c : c se ocupa de subir a bajar la parábola (la translada en sentido vertical).

Podríamos pintar la parábola a partir estos valores igual que hicimos con las rectas, pero sería muy complicado, por lo que para pintar una parábola vamos a hacer lo siguiente:

1. Hallaremos los puntos de corte con los ejes. El punto de corte con el eje $\mathcal{Y}$ es muy sencillo, no hay más que hacer $x = 0$, lo cual da el punto $(0, c)$. Para hallar el punto de corte con el eje $\mathcal{X}$ tenemos que hacer

$y = 0$, que, como ya sabemos, tiene como soluciones $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Con esos tres puntos ya podríamos pintarla, pero será mejor hallar cuáles son las coordenadas del vértice (ya que este es el único punto especial que tiene la parábola).

2. La coordenada x del vértice es $x_v = -\frac{b}{2a}$ [4]. Para pintar la parábola adecuadamente es *IMPRESCINDIBLE* hallar dicha coordenada.

3. Sólo en el caso en el que no haya puntos de corte con el eje $\mathcal{X}$ tenemos que usar el valor de a para pintar la parábola. Cuanto mayor sea este más abierta estará [5].

4.3. Funciones de proporcionalidad inversa.

Las funciones de proporcionalidad inversa son de la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Todas ellas son *hipérbolas equiláteras* que tienen como asíntota vertical $x = \frac{-d}{c}$ (¿Por qué?) y como asíntota horizontal $y = \frac{a}{c}$. Puedes ver por dónde van las ramas dando algún valor o estudiando el signo de $f(x)$ cuando nos acercamos a la asíntota vertical.

4.4. Funciones exponenciales.

Todas ellas se pueden pintar sin problema a partir de la gráfica de $f(x) = e^x$ (que ya debemos conocer). En efecto, si queremos pintar la gráfica de $g(x) = 2^x$ no hay más que ver que $g(x) = 2^x = \left(e^{\ln 2}\right)^x = e^{(\ln 2)x} = f(\ln 2x)$ que podemos pintar a partir de la sección anterior.

[4] Para hallar las coordenadas del vértice vamos a ver qué pasaría en el caso en el que hubiera puntos de corte con el eje $\mathcal{X}$. Si los dos puntos de corte son x_1 y x_2, como la recta que pasa por el vértice es un eje de simetría de la parábola, los dos puntos han de ser simétricos respecto de dicha recta, luego la x_v (coordenada x del vértice) es el punto medio de los dos, con lo que $x_v = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-b}{2a}$.

[5] Aunque en realidad existe un resultado según el cual *todas las parábolas son semejantes*, es decir, la parábola que vemos más abierta si la vemos de lejos estará igual de abierta que la parábola $y = x^2$