NÚMEROS RACIONALES

TEORÍA

- La suma (y resta) y el producto (y división) de dos números racionales es de nuevo racional.
- La suma (y resta) y el producto (y división) de dos números reales es de nuevo real.
- Teorema: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ α es exacto o periódico
- Para pasar de la forma decimal periódica a la forma racional se procede así: $\alpha = 23,\overline{58}$

$$\begin{array}{rrcr} & 100\alpha & = & 2358,\overline{58} \\ - & \alpha & = & 23,\overline{58} \\ \hline & 99\alpha & = & 2335,\overline{00} \end{array}$$

Podemos entonces despejar α de esta última relación, obteniendo que $\alpha = \dfrac{2335}{99}$

- Para pasar de un decimal exacto a su forma de fracción se procede así: $\alpha = 7,543$ luego $1000\alpha = 7543$ y, despejando de esta relación, $\alpha = \dfrac{7543}{1000}$
- Si el número es periódico mixto, se procederá como sigue: $\alpha = 17,2\overline{061}$

$$\begin{array}{rrcr} & 10000\alpha & = & 172061,\overline{061} \\ - & 10\alpha & = & 172,\overline{061} \\ \hline & 9990\alpha & = & 171889,\overline{000} \end{array}$$

Luego, como antes, $\alpha = \dfrac{171889}{9990}$

Ejercicio 1 *Pasa a su forma racional los siguientes números decimales:*

a) $2,\overline{4}$ *d)* $-72,0\overline{23}$ *g)* $-15,\overline{3827}$

b) $35,\overline{87}$ *e)* $23,8\overline{32}$ *h)* $98,3\overline{768637}$

c) $6,\overline{129}$ *f)* $34,286$ *i)* $-846,207$

Ejercicio 2 *Pasa a fracción* $0,\overline{9}$ *y simplifica ¿Qué sucede? ¿Puedes justificarlo? Pasa a fracción* $2,\overline{9}$*,*$41,\overline{59}$*,*$-1,3\overline{9}$ *y* $0,1\overline{9}$ *y simplifica ¿Puedes establecer algún principio general? ¿Podrías justificar dicho principio?*

Ejercicio 3 (*) *Podemos justificar lo deducido en el ejercicio anterior de varias formas. A continuación te doy dos de ellas para que las desarrolles:*

a) *El primer resultado es observar que si* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$ *entonces se cumple que* $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ *luego entre dos números reales distintos siempre hay otro distinto de ellos dos (en realidad hay infinitos, pero con uno nos basta) ¿Cómo podemos utilizar eso para justificar el resultado del ejercicio anterior?*

b) *Ahora haz la cuenta* $3 \cdot 0,\overline{3}$ *de dos formas distintas (en la notación decimal y en la forma de fracción) las dos operaciones te tienen que dar lo mismo ¿No?*

Ejercicio 4 *Dadas las siguientes afirmaciones di si son verdaderas o falsas y escribe cómo sería su negación. Si son verdaderas justifícalas y si son falsas encuentra un contraejemplo:*

a) *La suma de un número racional y de uno irracional es irracional.*

b) *El producto de un número racional y de uno irracional es irracional.*

c) *El cuadrado de un número irracional es irracional.*

d) *La suma de dos números irracionales es irracional.*

e) *El producto de dos irracionales es irracional.*

f) *El periodo del número* a/b *puede tener como máximo* $b-1$ *cifras*

Ejercicio 5 *Efectúa las siguentes operaciones:*

a) $\sqrt{0,\overline{4}}$ *c)* $0,\overline{7} \cdot 3$ *e)* $\sqrt{\dfrac{1,\overline{3}}{3}}$

b) $\dfrac{1,\overline{3} - 2,\overline{4}}{1,3\overline{2}}$ *d)* $0,\overline{57} + 3,2\overline{4}$ *f)* $0,\overline{27} \cdot 3,2\overline{1}$

Ejercicio 6 (*) *Utilizando que* $1/p$ *es un número periódico, y especialmente en el método para hallar su forma de fracción a partir del decimal periódico, demusetra el siguiente resultado:*

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ *primo* $p \neq 2, 5$ $\exists n \in \mathbb{N}$ *formado sólo por nueves, tal que* p *divide a* n*. Es decir, todo primo que no sea el* 2 *ni el* 5*, tiene un múltiplo cuya única cifra es el* 9*, por ejmplo el* 7 *tiene por múltiplo el* 999999*, el* 37 *tiene como múltiplo el* 999*,...etc*

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ *primo* $p \neq 2, 5, 3$ $\exists n \in \mathbb{N}$ *formado sólo por unos, tal que* p *divide a* n*. Es decir, todo primo distinto de* $2, 3$ *y* 5 *es divisor de algún número cuya única cifra es el* 1*, por ejemplo el* 7 *es divisor del* 111111 *y el* 37 *es divisor de* 111

c) *¿Qué relación tiene el número de nueves del múltiplo con el número de cifras del periodo?*

RADICALES

TEORÍA

- $\sqrt[n]{A} = a \Leftrightarrow a^n = A$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ya que $(A \cdot B)^n = A^n \cdot B^n$
- En general **NO SE CUMPLE** que $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ ya que, en general, $(A+B)^n \neq A^n + B^n$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$ para cualquier a y n
- $\sqrt[n]{a^{p+n}} = a\sqrt[n]{a^p}$ que se demuestra a partir de las anteriores.
- La racionalización consiste en eliminar las raíces de una fracción en la que aparezcan en el denominador. Vamos a ver sólo dos tipos: Cuando hay sólo una raíz n-ésima en el denominador y cuando hay una suma de dos raíces cuadradas.
- Si hay una raíz n-ésima lo que haremos será multiplicar denominador y numerador por lo que le queda para ser exacta. Ejemplo:

$$\frac{3}{2\sqrt[5]{3^2}} = \frac{3}{2\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{3\sqrt[5]{3^3}}{2\sqrt[5]{3^2}\sqrt[5]{3^3}} = \frac{3\sqrt[5]{3^3}}{2\sqrt[5]{3^5}} = \frac{3\sqrt[5]{3^3}}{2 \cdot 3}$$

- Si hay una suma/resta de raíces cuadradas utilizaremos la identidad $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ de la siguiente manera:

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{5-3} = \frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$$

Ejercicio 7 (Propiedades de las potencias) *Definimos* $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \cdot a$. *justifica que se tienen las siguiente propiedades:*

a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

b) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

d) Utilizando que, según las propiedades anteriores, se ha de tener que $a^0 \cdot a^n = a^{0+n}$ *¿Qué valor tendrá* a^0*?*

e) Utilzando que $a^{-n} = a^{0-n}$ *¿Qué valor ha de tomar* a^{-n}*?*

f) Utilizando que $(a^{1/n})^n = a$ *(¿ppor qué?) ¿Qué valor ha de tomar* $a^{1/n}$

g) Justifica que definamos entonces $a^{m/n}$ *como* $\sqrt[n]{a^m}$

Ejercicio 8 *Racionaliza:*

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\dfrac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$

e) $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$

f) $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

Ejercicio 9 *Demuestra que* $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = 2$ *(pista: elévalo al cuadrado)*

Ejercicio 10 *Simplifica los siguientes radicales:*

a) $\sqrt{4xyz} \cdot \sqrt{xy} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2}zx^3}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt{a^3}}}{\sqrt[4]{a}}$

c) $a^{-\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{2}})^{-4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[3]{81 \cdot 10^4 \cdot x^6}$

e) $\sqrt{\dfrac{16a}{27}}$

f) $(x+1)\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Ejercicio 11 *Simplifica las siguientes sumas:*

a) $\sqrt{5} - 2\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - 5\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{625}$

c) $2\sqrt{3} + \dfrac{10}{3}\sqrt{27} - 2\sqrt{108}$

d) $y^2\sqrt[3]{x^3y} + 2y\sqrt[3]{x^3y^4} + \sqrt[3]{x^6y}$

e) $\dfrac{8\sqrt{72} - 3\sqrt{288} - 2\sqrt{338}}{7\sqrt{2}}$

Ejercicio 12 *Simplifica:*

a) $\sqrt[3]{\dfrac{2\sqrt[3]{2^2\sqrt{2^5}}}{\sqrt[6]{2^5}}}$

b) $\left(\sqrt{\dfrac{a^3\sqrt{\sqrt{a}}}{a\sqrt[5]{a^3}}}\right)^{-1/3}$